استاندارد ارتباط و اتصال
برای پایه‌های ۹ تا ۱۲

نویسنده: شورای ملی معلمان ریاضی
ترجمه: بهنام آیتی‌پور
دبیر ریاضی دزفول

اشاره
زمانی‌که دانش‌آموزان بتوانند ارتباطات بین حوزه‌های محتوایی متفاوت ریاضی را ببینند، به این دیدگاه اشراف پیدا می‌کنند که ریاضی، کلیتی یک‌پارچه (هماهنگ) است. وقتی آن‌ها بر پایه دانش پیشین خود از ریاضی، آموختن مفاهیم جدید را بنا می‌کنند، بیشتر و بیشـــتر از ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی آگاه می‌شوند. هم زمان، دانش ریاضی دانش‌آموزان، توانایی آن‌ها را در به‌کارگیری حوزهٔ وسیعی از بازنمایی‌های ریاضی و دسترســـی آن‌ها را به تکنولوژی‌های پیچیده و نرم‌افزارهای پیشرفته بیشتر می‌کند و ارتباط‌هایی با سایر حوزه‌های دانشی و دیسیپلین‌های آکادمیک به‌خصوص علوم پایه و علوم اجتماعی، برقرار می‌کنند.
کلیدواژه‌ها: ارتباط، اتصال، بازنمایی‌های ریاضی

منظور از ارتباط و اتصال در پایه‌های ۹ تا ۱۲ چیست؟

دانش‌آموزان در پایه‌های ۹ تا ۱۲، باید به سطحی برسند که بتوانند ظرفیت‌های بالقوه و فزاینده خود را به‌وســـیله ارتباط‌های عمیق‌تر بین ایده‌های ریاضی، برقرار کنند و آنان باید بدانند که چگونه راه‌حل‌های مختلف برای یک مسئله، می‌تواند در نهایت، به نتایج معادل منجر شوند.

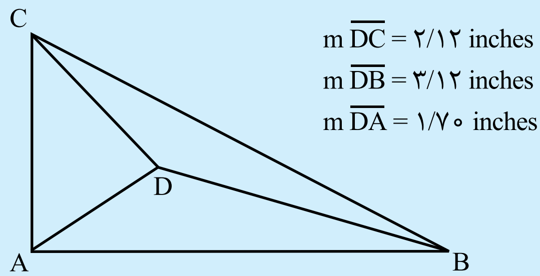
دانش‌آموزان می‌توانند از بینشی که از یک زمینه به دست آورده‌اند، برای اثبات یا رد یک حدسیه، استفاده کنند و با مرتبط کردن ایده‌های ریاضی می‌توانند درک قوی‌تری از مسئله‌ها پیدا کنند.

در مثال فرضی زیر، ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌ها و رویکردهایی که نسبت به یک مسئله ریاضی، به نظر بسیار متفاوت‌اند برجسته شده است.

وقتی که آقای رابینسون، معلم پایه دهم ریاضی، کلاس را با این داستان شروع کرد، دانش‌آموزان، حدس زدند که قرار است مسئله‌های جالبی حل کنند. مسئله این بود:

من دچار یک مخمصه شده‌ام. همان‌طور که احتمالاً می‌دانید، یک سگ باوفا دارم و حیاطی که شبیه یک مثلث قائم‌الزاویه است. وقتی می‌خواهم که فیدو [نام سگ] از حیاطم مراقبت کند و چون نمی‌خواهم گم شـــود، می‌خواهم برایش قلاده بزنم و قلاده را جائی نزدیک محوطه حیاط، ببندم. اما هر کجا که قلاده را ببندم، می‌خواهم مطمئن باشـــم که این سگ، می‌تواند به هر گوشهٔ حیاط برود. می‌خواهم از کوتاه‌ترین قلاده ممکن استفاده کنم.

بعد از این‌که آقای رابینسون، به پرسش‌ها و نظرات معمول پاسخ می‌دهد (مانند این که «واقعاً یک سگ دارید؟» آیا این که «فقط یک معلم ریاضی ممکن است که حیاطش مثلثی شکل باشد؟» یا «متوجه شود که حیاطش به شکل مثلث قائم‌الزاویه است» و «این سگ از چه نژادی است؟»



شکل ۱

او از دانش‌آموزان خواســت که در گروه‌های سه نفری کار کنند. همه ابزارهای معمول شامل نقاله، گونیا، ماشین حساب و کامپیوتر را به همراه نرم‌افزارهای هندسی در دسترس‌شان بود. آن‌ها باید برای حل این مسئله، نقشه‌ای طراحی می‌کردند. جنیفر مستقیم وارد حل مسئله شد و گفت: « با استفاده از کامپیوتر، یک نمودار بکشیم. با موافقت هم‌گروهی‌هایش، شکل بالا را رسم کردند. (همانند شکل ۱)

آقای رابینســون در کلاس می‌گشت، و با فرصت کافی، بر کار هر گروه و پیشرفتشان، نظارت می‌کرد. در این بازدیدها به نظر می‌رســید که گروه جنیفر، بیشتر به‌طور تصادفی کار می‌کردند و تجربه می‌نمودند، مثلاً نقطه D را در مکان‌های مختلف می‌کشیدند، اما بار دومی که کار گروه را دید، معلوم بود که نظام‌وارتر کار می‌کنند.

معلم برای ارزیابی آنچه که اعضای گروه فهمیده‌اند، پرسید که آن‌ها چه‌کار می‌کنند.

آقای رابینسون: جو، می‌تونی به من بگی که برای حل این مسئله، چه کارهایی کردین؟

جو: ما سعی می‌کنیم بفهمیم که کجا باید نقطه را قرار بدیم.

جف: ما نمی‌خوایم که نقطه‌ها، زیادی به گوشه‌های مثلث نزدیک شوند.

جنیفر: فهمیدم! می‌خوایم که طول همه اضلاع مساوی باشد. این سه ضلع، همه مخالف یکدیگر کار می‌کنند (یعنی هر چقدر طول یک ضلع کوتاه‌تر شود، طول ضلع‌های دیگر بزرگ‌تر می‌شود.)

قبل از حرکت کردن به ســمت کار با سایر گروه‌ها، آقای رابینسون با اعضای گروه جنیفر کار کرد تا ایده‌هایشان را شفاف کنند و برای این کار، از زبان ریاضی رسمی‌تری استفاده کرد و فرصت داد تا آن‌ها، با هم تبادل نظر کنند تا به یک درک مشترک برسند.

جنیفر ایده‌اش را شــفاف کرد و گروه به این تصمیم رســید که ایده جنیفر، منطقی به نظر می‌رسد. هدف بعدی آن‌ها، پیدا کردن موقعیت نقطه D به گونه‌ای بود که اندازه پاره خط‌های DC، DB، DA برابر باشند.

وقتی که آقای رابینسون از آن گروه بازگشت، آن‌ها نتیجه گرفته بودند که نقطه D، باید وسط وتر باشد. در غیر این صورت، فاصله نقطه D از B و C، نمی‌تواند برابر باشد. (آقای رابینسون برای خودش یادداشت کرد که نتیجه‌گیری گروه، به اندازه کافی توجیه‌کننده نیست، اما تصمیم گرفت که در این مرحله، مداخله نکند. کاری که بعداً انجام دادند، تولید اثباتی بود که آن‌ها را از درستی استدلال خود، مطمئن کند.)

آقای رابینسون: چه چیزی دیگری را باید بدانید.

جف: ما هنوز مطمئن نیستیم که نقطه D، باید از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد.

جنیفر: باید چنین باشــد! حداقل من فکر می‌کنم که باید باشد. به نظر می‌رسد که نقطه D، مرکز یک دایره است.

گفتگو در گروه‌های کوچک ادامه داشت تا این‌که چندین گروه، مشاهدات و حدسیه‌های مشـــابهی با گروه جنیفر ارائه دادند. پس از آن، آقای رابینسون از دانش‌آموزان خواست که در جاهای خود بنشینند تا به صورت کلاس، همه با هم راجع به مسئله و نتایجی که آن‌ها به‌دست آورده بودند، بحث کنند. زمانی‌که همه دانش‌آموزان بر روی یک حدسیه به توافق رسیدند، آن را روی تابلو، نوشت:

حدسیه: نقطه وسط وتر هر مثلث قائم‌الزاویه، از سه رأس آن مثلث، به یک فاصله است.

پس از این، از دانش‌آموزان خواست که به گروه‌هایشان برگردند و برای اثبات یا پیدا کردن یک مثال نقض، تلاش کنند. گروه‌ها کار بر روی مسئله را ادامه دادند و مسیر اثبات را برگزیدند. هر گروه، یک نفر را انتخاب کرد که اثبات خود را ارائه دهد. مثل همیشه، آقای رابینسون بر این حقیقت تأکید کرد که ممکن است راه‌های متفاوتی برای اثبات یک حدسیه، وجود داشته باشد.

با توجه به صحبت‌های آقای رابینسون در مورد به کارگیری دستگاه متخصات «برای ساده کردن کارها»، یکی از گروه‌ها مختصات را مطابق شکل (۲. الف) قرار دادند و نتیجه گرفتند که فاصله مشترک، $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

آلفونس، که این راه حل را شرح داد، با افتخار یادآور شد که این راه حل قضیهٔ فیثاغورس را برایش تداعی می‌کند. آقای رابینســـون بر اساس آن مشـــاهدات، به کلاس متذکر شد که اگر دانش‌آموزان، عمودی از M بر AC رســـم کنند، دو مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود آمده، دارای قاعده‌هایی به طول‌های a و b هســـتند، در نتیجه، معلوم است که طول وترهای MC و MA، $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

گروه جنیفر، به نکته‌ای که پیش‌تر راجع به این که سه نقطهٔ A، B و C، روی یک دایره واقع هستند، برگشتند. پس از یک گفت‌وگوی طولانی بین اعضای گروه جنیفر وپرسیدن سؤال‌هایی ازآقای رابینسون، آن‌گروه اثبات دیگری را براساس زوایای داخلی مثلث ارائه داد! (شکل ۲. ب)

شکل ۲